Trigonometría

Trigonometría es una palabra que proviene del griego y, literalmente, significa medida del triángulo. En sus inicios, esta rama de la matemática se desarrolló en el estudio de las relaciones entre los ángunos y los lados del triángulo, como consecuencia de sus aplicaciones a la astronomía, navegación y agrimensura. Dicho estudio se centraba en las llamadas razones trigonométricas y su fundamento geométroco es el que sigue. Consideremos un ángulo agudo como el de la figura 2.1 y desde su lado final tracemos perpendiculares a su lado inicial.

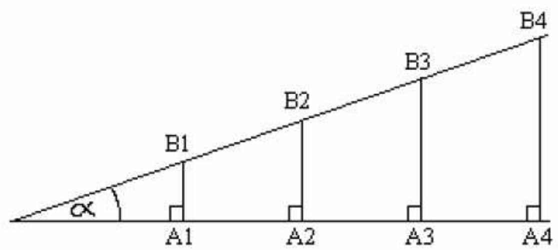

Fig 2.1

Es claro que todos los triángulos rectángulos que así se forman son semejantes y, en consecuencia, sus lados homólogos son proporcionales. Se puede, entonces, escribir 6 razones distintas de lados cuyo valor, en cada caso, es constante para todos estos triángulos:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{OB_1} = \frac{\overline{A_2B_2}}{OB_2} = \frac{\overline{A_3B_3}}{OB_3} = \frac{\overline{A_4B_4}}{OB_4} = \frac{|Cateto\ \ opuesto\, a\,\alpha|}{|Hipotenusa|}$$

$$\frac{\overline{OA_1}}{OB_1} = \frac{\overline{OA_2}}{OB_2} = \frac{\overline{OA_3}}{OB_3} = \frac{\overline{OA_4}}{OB_4} = \frac{|Cateto\, adyacente\ \ a\,\alpha|}{|Hipotenusa|}$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{OA_1} = \frac{\overline{A_2B_2}}{OA_2} = \frac{\overline{A_3B_3}}{OA_3} = \frac{\overline{A_4B_4}}{OA_4} = \frac{|Cateto\ \ opuesto\, a\,\alpha|}{Cateto\, adyacente\ \ a\,\alpha}$$

y las razones recíprocas de éstas.Dada cualquiera de estas razones, el ángulo α queda determinado en forma única y, además, puede ser construido con gran precisión. Estas son las razones trigonométricas y se denotan:

senα :=(cateto opuesto de α)/(hipotenusa), se lee seno alfa.
cosα :=(cateto adyacente a α)/(hipotenusa), se lee coseno alfa
tan α:= (cateto opuesto a α)/(cateto adyacente a α)
= senα /cosα, se lee tangente alfa, y las recíprocas de estas:
cot α:= 1/tanα, se lee cotangente alfa
sec α:= 1/cosα, se lee secante alfa
cosecα:= 1/senα, se lee cosecante alfa

En vista de que a cada ángulo agudo corresponde un único valor de cada una de las razones trigonométricas y, recíprocamente, dado un valor de una de éstas razones hay un único ángulo agudo determinado por éste, se obtuvo en forma natural, pero en absoluto fácil, la ordenación en tablas de valores: αº v/s (valor de razones trigonométricas), de gran utilidad práctica. Son pocos los ángulos agudos para los cuales los valores de las razones trigonométricas son obtenibles por argumentos geométricos elementales; entre ellos se cuentan los dados en la tabla1 y fracciones sencillas de los mismos como 15º, 18º, 22.5º, etc.

αº	30º	45º	60º
senα	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cosα	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
tanα	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

TABLA1

Para ilustrar el uso de esta tabla consideremos el siguiente ejemplo:
En el triángulo de la figura2.2, rectángulo en C, se tiene que

$\overline{AB} = c = 10.2[cm]$,
$\overline{AC} = b = 6.1[cm]$,
$\alpha = \angle CAD = 35º24'$.

Para calcular la longitud de la altura h = $\overline{CD}$ se tiene que: $\frac{h}{AC} = $ sen$\alpha \Rightarrow$ h = $\overline{AC}$ senα

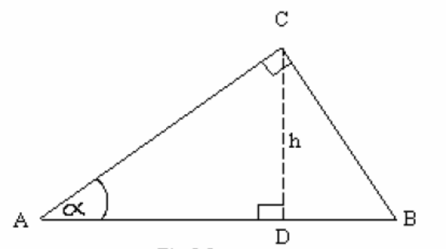

Fig 2.2

Utilizando solo los cinco primeros dígitos de la calculadora se tiene que sen(35º24')=sen35.4≈0.57928 ⇒h ≈ (6.1)(0.57928) ≈ 3.53361[cm]
A medida que se extiende el uso de calculadoras científicas y computadores, la utilización de tablas es cada vez menos frecuente. Sin embargo, esto último no pasa de ser un detalle pues la gran evolución de la Trigonometría se ha producido en su tratamiento teórico y en las aplicaciones. En efecto, del tratamiento geométrico de las razones trigonométricas, se ha pasado a formulaciones mas abstractas y generales, de las cuales en este curso solo veremos la mas elemental de ellas que corresponde a la función trigonométricas; en cuanto a las aplicaciones, estas abarcan toda clase de fenómenos periódicos como oscilaciones y vibraciones: desde las ondas sonoras a un rayo de luz, desde las olas del océano a una ecocardiografía o desde la teoría de comunicaciones a las vibraciones de las alas de un avión, la Trigonometría encuentra aplicación en la descripción de una gran cantidad de fenómenos. Todo esto, por supuesto, no invalida el tipo de trabajo que se mostró en el ejemplo anterior, el cual aun resulta aconsejable en presencia de un problema suceptible de ser tratado independientemente de un sistema de coordenadas.

Funciones trigonométricas

Medición de ángulos. Desde un punto de vista intuitivo, podemos considerar que un ángulo es el conjunto de puntos de un plano generado por la rotación de una semirecta en torno a su extremo, desde una posición inicial hasta una posición final. A estas posiciones de les llama lado inicial y lado final del ángulo; el extremo de la semirecta es el vértice del ángulo(fig2.3)

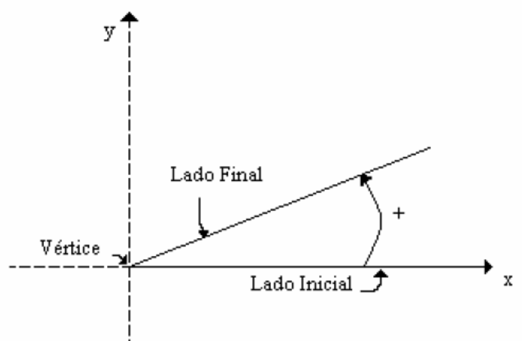

Fig 2.3

Con esto se entenderá que en trigonometría interesan los ángulos dirigidos y, aún más, diremos que el ángulo está en posición standard si su lado inicial coincide con el semieje positivo OX, por lo tanto su vértice e el orígen, de un sistema de coordenadas cartesiano X –Y. Un ángulo de dirá que es positivo si la rotación de la semirecta es en sentido contrario a la de los punteros del reloj y negativo en el caso contrario.por supuesto, el lado final del ángulo puede dar mas de una vuelta completa en torno al vértice, generando así ángulos con medidas mayores que 360º o menores que -360º.

Medida en radianes de un ángulo. Consideremos la función enrrollado, w:R→S^1, descrita en la sección 1.1 y sea x ∈ R. La porción de la recta real (trazo) determinada por el orígen O y el punto x es enrrollada sobre S^1(en el sentido positivo si x>0 y en el sentido negativo si x<0),cubriendo un arco de S^1 cuya longitud es $|x|$ y que puede dar varias vueltas sobre S^1, partiendo desde el punto A=(1,0) hasta alcanzar el punto final P=(x_p, y_p).

Este arco subtiende un ángulo de:

$$\theta^o = n\cdot 360^o + \alpha^o$$

donde n = nº de vueltas alrededor de S^1 y

$\alpha = \angle(AOP) \quad (= (OA, OP)\ para \quad indicar \quad que \quad es \quad dirigido)$

Entonces,x es la medida de θ en radianes.

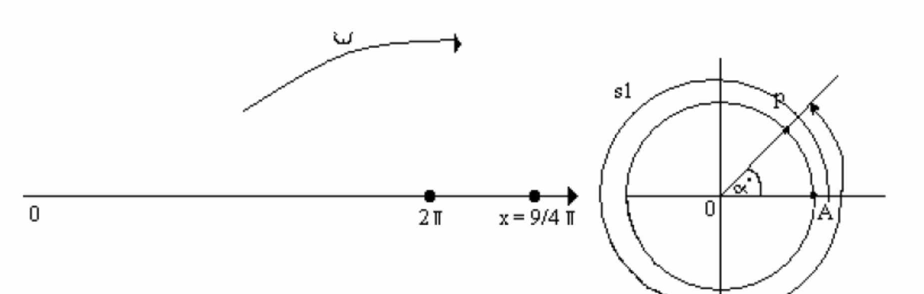

Fig 2.4

En la fig 2.4 se tiene que:

$$x = \tfrac{9}{4}\pi = 2\pi + \tfrac{2\pi}{8}.$$

Dado que la longitud de S^1 es 2π, entonces el trazo determinado por O y x da una vuelta completa sobre S^1 y abarca, además, 1/8 de vuelta. Con esto el ángulo sobtendido es en grado sexagesimales:

$$\theta^o = 1\cdot 360^o + \tfrac{360^o}{8} = 405^o,$$

y en radianes: $\theta^{rad} = 9\pi/4$

En general: $\dfrac{\alpha^{rad}}{\alpha^o} = \dfrac{\pi}{180^o}$.

Funciones trigonométricas. Hemos visto que un ángulo θ, salvo el número de vueltas sobre S^1 que se deduce de su medida en grados o radianes, queda completamente determinado por un punto: w(x) = P = $(x_p, y_p) \in S^1$.
Luego podemos formular las definiciones siguientes.

Definición 2.1

i) La función sen: R→R se define por: sen(x) = y_p.

ii) La función cos: R→R se define por: cos(x) = x_p.

Observaciones:

(1) De la definición anterior se tiene que

$$sen \equiv \pi_2 \circ w \qquad y$$
$$\cos \equiv \pi_1 \circ w$$

Del mismo problema resuelto obtenemos la siguiente tabla de valores para las funciones sen y cos.

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π
sen(x)	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
cos(x)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{3}/2$	-1

Además, dado que los valores de sen(x) y cos(x) sólo dependen del punto final P=(x_p, y_p) sobre S^1 y la longitud total de S^1 es 2π, enteonces, fuera del intervalo [0, 2π], los valores de estas funciones se repiten preiódicamente y las gráficas de estas funciones se extienden también periódicamente sobre todoR.

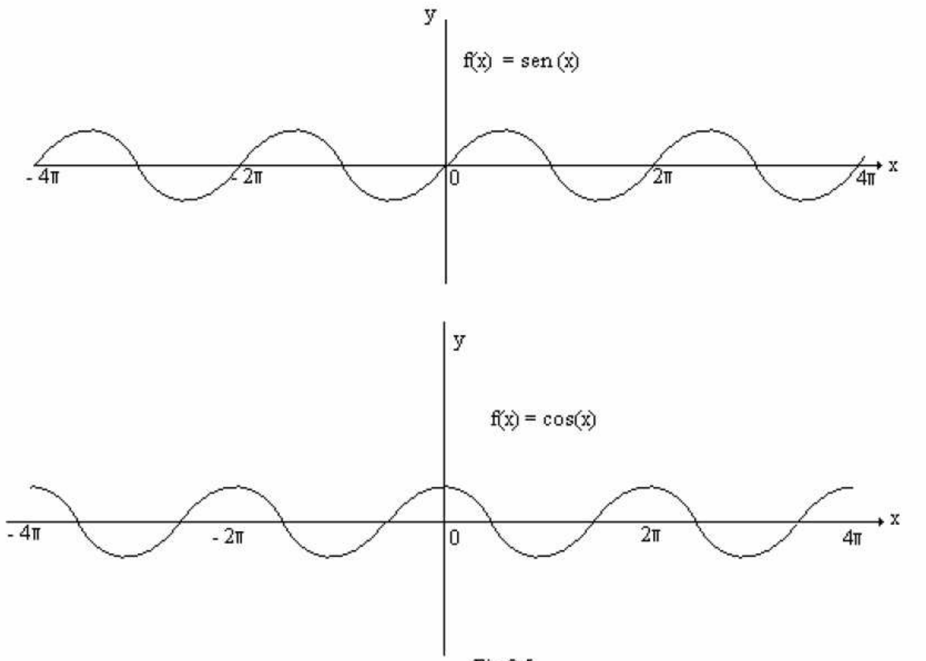

Fig 2.5

(2) En la fig. 2.6 podemos observar que las razones trigonométricas senα y cosα, mencionadas en la introducción a esta sección, quedan incluidas como valores de las funciones sen y cos en el sentido que, para un ángulo agudo α, se verifica:

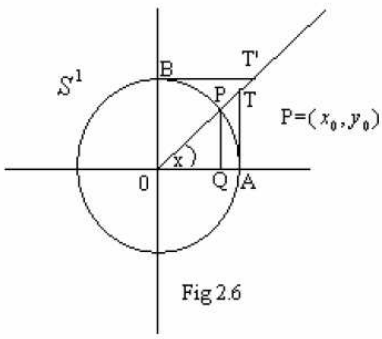

Fig 2.6

sen(α°)=sen(α^{rad})=sen(x)= $\dfrac{Cateto\ \ opuesto\, a\, \alpha}{Hipotenusa} = \dfrac{y_0}{1}$

cos(α°)=cos(α^{rad})=cos(x)= $\dfrac{Cateto\ \ adyacente\, a\, \alpha}{Hipotenusa} = \dfrac{x_0}{1}$

Así sen(x) queda representado por la longitud del trazo $\overline{PQ}$ y cos(x) por la longitud de $\overline{OQ}$. Por otra partem dado que, para cada x ∈R se tiene que (cos(x)sen(x))∈ S^1, a estas funciones también se les llama funciones circulares (con valores en S^1) verificándose que:

Dom sen= Dom cos= R, Rec cos=[-1,1] y

$$\cos^2(x) + sen^2(x) = 1 \qquad para\, cada\, x \in R.$$

Definición 2.2

Sea A⊆R y sea f: A→R una función. Si existe una constante positiva p tal que:

i) x∈A⇒x + k · p ∈ A para cada k∈Z, y
ii) f(x + kp)= f(x)para cada x∈A, entonces diremos que f es una función periódica y que p es un período de f.

Observación: Resulta evidente que, si p es un período, entonces np es, también, un período para cada n ∈ N. Si ocurre que, entre todos los períodos de una función periódica, existe un período T que es el mas pequeño, entonces diremos que T es el período de la función (observe que para una función constante cualquier constante positiva es un período).

Corolario 2.1.1 Las funciones sen y cos son periódicas con período T=2π

Siguiendo la nomenclatura empleada en las razones trigonométricas y usando la noción de cuociente de funciones vista en la Sec 1.2, definimos las funciones trigonométricas (circulares) siguientes.

Definición 2.3: Las funciones tan, cot, sec y cosec se definen por:

$$\tan \equiv \tfrac{sen}{\cos}, \cot \equiv \tfrac{1}{\tan} = \tfrac{\cos}{sen}, \sec \equiv \tfrac{1}{\cos}\, y \cos ec \equiv \tfrac{1}{sen}.$$

Observaciones:

(1)Dom tan = Dom sec = {x∈ R |cos(x)≠0}
= {x∈R |$(\pi_1 \circ w)$(x) ≠0}
= {x ∈R |$w(x) \neq (0,1),(0,-1)$}
$= \{x \in R | x \neq \tfrac{2k+1}{2}\pi, k \in Z\}$ y, análogamente
Dom cot = Dom cosec = {x∈ $R | x \neq k\pi, k \in Z$ }

(3) En la fig 2.6, los valores de estas funciones trigonométricas quedan representadas por las longitudes de los trazos que se indican:

$\tan(x) = \overline{AT}, \cot(x) = \overline{BT'}, \sec(x) = \overline{OT}, \cos ec(x) = \overline{OT'}$.

En adelante escribiremos, como es costumbre hacerlo, sen x en lugar de sen(x), cos x en lugar de cos(x), etc.

Propiedades de las funciones trigonométricas

Propiedades e Identidades Fundamentales. Casi todas las propiedades e identidades fundamentales pueden desprenderse de las fórmulas para sen($\alpha \pm \beta$) o cos($\alpha \pm \beta$). De allí que existan variadas formas de obtener dichas fórmulas, algunas de las cuales propusieron como ejercicio en la sección anterior. De todas las formas conocidas de obtener las expresiones para sen o cos de una suma, la más fácilmente comprensible, general y breve parece ser la sugerida por Cauchy y, con el fin de utilizarla en nuestro trabajo, necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.4: La distancia entre dos puntos cualesquiera A = (a_1, a_2) y B = (b_1, b_2) en R^2, que denotaremos d(A,B), es:

d(A,B):= $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.
Si A y B fueran puntos sobre el eje OX; es decir A =(a_1,0), B =(b_1,0) entonces d(A,B)= $\sqrt{(b_1 - a_1)^2} = |b_1 - a_1|$ y si A y B fueran puntos sobre el eje OY, es decir A=(0, a_2), B=(0, b_2), entonces d(A,B)= $\sqrt{(b_2 - a_2)^2} = |b_2 - a_2|$.

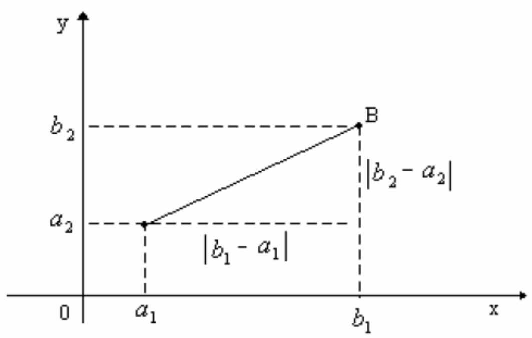

Fig 2.21

De la fig 2.21 puede observarse que la Def 2.4 simplemente establece la validez del Teorema Particular de Pitágoras en nuestras representaciones gráficas.

Consideremos, ahora, la fig 2.22 donde:

$\angle AOP = \beta,$
$\angle AOQ = \alpha - \beta$
$\angle AOR = \alpha,$
$A = (1,0),$
$P = (\cos\beta, sen\beta),$
$Q = (\cos(\alpha - \beta), sen(\alpha - \beta))$ y
$R = (\cos\alpha, sen\alpha).$

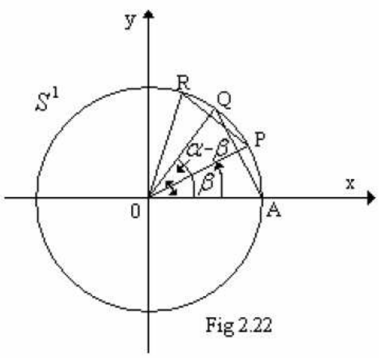

Fig 2.22

Ya sea que consideremos la congruencia de los triángulos AOQ y POR, o que $\angle AOQ$ y $\angle POR$ (de igual medida) subtienden cuerdas con la misma longitud, se tiene que: d^2(A,Q)= d^2(P,R); es decir:

$$(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (sen(\alpha - \beta) - 0)^2 =$$
$$= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (sen\alpha - sen\beta)^2 \Leftrightarrow 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$
$$= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2sen\alpha sen\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta.$$

Dado que en la obtención de esta última fórmula no hemos hecho consideración de la medida de α y β ni del cuadrante en el cual sus lados finales están ubicados, se obtiene el teorema siguiente.

Teotema 2.1 Para todo α , $\beta \in$ R se verifica que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta$$

Nota:
De la fórmula obtenida en el Teor 2.1 podemos derivar todas las identidades trigonométricas, las cuales son igualdades que satisfacen para todos los valores de las variables en los dominios de las funciones involucradas;de estas identidades listamos a continuación aquellas que consideramos fundamentales.

Identidades fundamentales:

$$\sec^2\alpha = \tan^2\alpha + 1$$
$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta$$
$$sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - \cos\alpha sen\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$sen2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha \qquad \cos 1\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{\tan 2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$sen(\varepsilon/2) = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos\alpha}{2}}, \cos(\varepsilon/2) = \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$\tan(\varepsilon/2) = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

(El doble signo ante cada raíz no debe mal entenderse: en cada caso debe seleccionarse el que corresponda de acuerdo con α y la función correspondiente).

$$sen\alpha + sen\beta = 2sen\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$
$$sen\alpha - sen\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}sen\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2sen\tfrac{\alpha+\beta}{2}sen\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

Además, para cada $\theta \in R$:

$$\text{sen}\theta = \cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta)$$
$$\cos\theta = \text{sen}(\tfrac{\pi}{2}-\theta)$$
$$\text{tg}\theta = \cot(\tfrac{\pi}{2}-\theta)$$
$$\cot\theta = \text{tg}(\tfrac{\pi}{2}-\theta)$$
$$\sec\theta = \text{cosec}(\tfrac{\pi}{2}-\theta)$$
$$\text{cosec}\theta = \sec(\tfrac{\pi}{2}-\theta)$$

Un manejo eficiente de las identidades trigonométricas permite la simplificación de fórmulas, el cómputo de expresiones en las cuales intervienen varias funciones pero sólo se conoce los valores de una de ellas, la determinación de ceros de combinaciones de funciones trigonométricas (ecuaciones trigonométricas), etc.

Ls sinusoide general. Toda función de la forma:

$$y = a \text{ sen } (\omega t)+b \cos(\omega t), \qquad (1)$$

se llama función sinusoidal. La función en (1) podemos escribirla:

$$y = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} sen \overline{\omega} xx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \overline{\omega} x\right). \qquad (2)$$

Dado que:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1, se \quad tiene\, que \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \in S^1$$

$$\Rightarrow existe\, un\, único\, \phi, 0 \le \phi \prec 2\pi, tal\ que:$$

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, sen\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, tg\phi = b/a.$$

Luego, poniendo A:= $\sqrt{a^2+b^2}$, (2) se puede escribir:

$$y = A\,(\cos\phi \text{ sen } \omega x + sen\phi \cos \omega x) = A\text{sen}(\omega x + \phi). \qquad (3)$$

(Es claro que (1) también puede escribirse en la forma: Acos($\omega x + \phi$ ')).
En (3) se tiene que:

a) si T es el período de la sinusoide, entonces:

$$Asen(\omega(x+T)+\phi) = Asen(\omega x+\phi) = Asen(\omega x + 2\pi + \phi) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

b) $y = Asen(\omega x + \phi) = Asen\left(x - (-\frac{\phi}{\omega})\right)$

Luego, - $\frac{\phi}{\omega}$ es el monto en el cual la sinusoide está desfasada (adelantada o atrasada) y, en consecuencia, para graficarla podemos iniciar un ciclo en el punto (- $\frac{\phi}{\omega}$,0).

Llamaremos a - $\frac{\phi}{\omega}$ el angulo de fase de la sinusoide.

c) Al número positivo A lo llamaremos (por razón que debe ser obvia de la fig 2.23) Amplitud de la sinusoide.

d) Al número positivo $|\omega| = 2\pi / T$ lo llamaremos frecuencia.

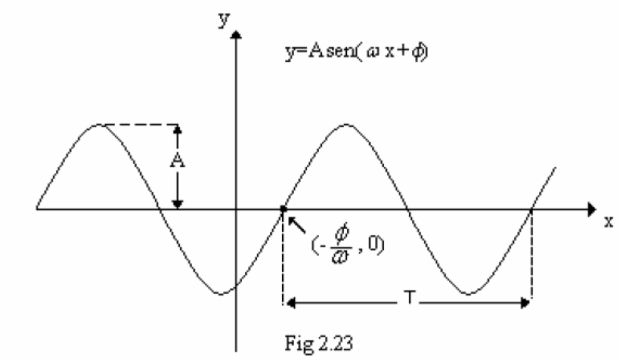

Fig 2.23

Apendice 2.2
Un Programa Gráfico.

1. Para obtener una visión gráfica de lo que representa los parámetros A, T, ϕ y ω, utilice el programa gráfico que se incluye en el Anexo para graficar la sinusoide:

   f (x) = A sen(ω x+ϕ),

para todas las combinaciones de los siguientes valores: A = ½, 1, 2;
ω= ½, 1, 3 (con los correspondientes valores de T= $\frac{2\pi}{\omega}$);
ϕ= -π/3, 0, π/3.

2. Las posibilidades de aplicación de las funciones trigonométricas al estudio de toda clase de fenómenos periódicos, se ven más claramente después de un curso de Análisis de Fourier (Cálculo IV). Sin embargo, las cacilidades gráficas que ofrece el programa utilizado en 1, permiten imaginar el amplio campo de aplicaciones que se ofrece a estas funciones.

Consideremos las ondas f(t) que se definen a continuación y las correspondientes series de Fourier.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n senn\omega_0 t)(o \quad f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n))$$
que las representan

(1) La onda cuadrada de amplitud uno y período 2π (fig 2.24); es decir:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi \prec t \prec 0 \\ 1 & 0 \prec t \prec \pi \end{cases}$$

$$f(t) = \tfrac{4}{\pi}(sent + \tfrac{1}{3}sen3t + \tfrac{1}{5}sen5t + ...)$$

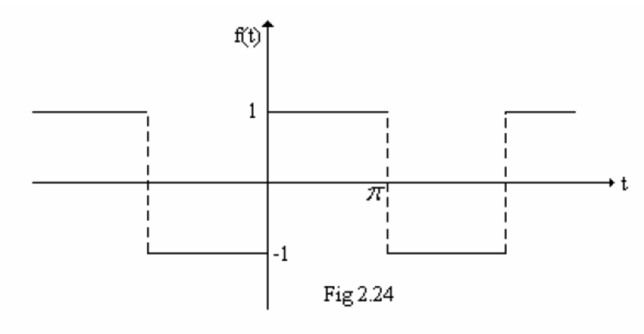

Fig 2.24

(2) La onda diente de sierra (fig 2.25) definida por:

$$f(t) = \tfrac{A}{T}t, 0 \prec t \prec T,$$
$$T = \pi, \omega_0 = 2\pi / T, A = 1$$
$$f(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\pi}(sen\omega_0 t + \tfrac{1}{2}sen2\omega_0 t + \tfrac{1}{3}sen3\omega_0 t + ...)$$

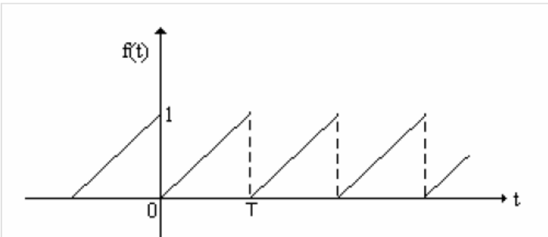

Fig 2.25

En cada caso grafique las sumas parciales $S_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(\cdot)$ para n=1, 2, 3, 4 utilizando el programa gráfico ya mencionado. ¿Poe qué no aparecen los términos en cos $n\omega_0 t$ en las series de (1) y (2)?

Dos teoremas en el Triángulo-Ecuaciones Trigonométricas

Consideremos un triángulo ABC cualquiera y ubiquémoslo en un sistema de coordenadas cartesianas de modo que su ángulo α esté en posición standard (fig 2.28). Entonces

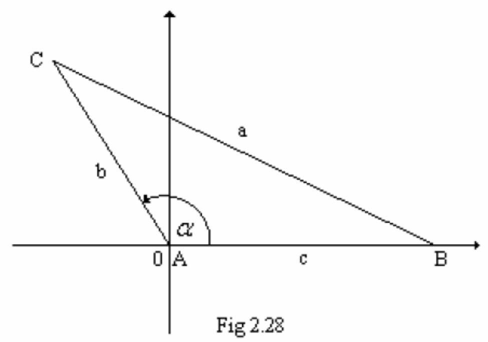

Fig 2.28

A = (0, 0), B =(c, 0) y C = b(cosα, senα) = (b cosα, b senα) y

$$\begin{aligned} a^2 &= d^2(B,C) = (c - b\cos\alpha)^2 + (0 - bsen\alpha)^2 \\ &= c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + b^2 sen^2\alpha = \\ &= b^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{aligned}$$

Se tiene, entonces, el siguiente resultado.

Teorema 2.2 (Teorema del cos). En un triángulo ABC cualquiera se tiene que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Poniendo en posición standard los ángulos β y γ se obtiene en forma análoga:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Teorema 2.3 (Teorema del sen) . En un triángulo ABC cualquiera se tiene que

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$$

Las aplicaciones inmediatas de estos dos teoremas son obvias:

i) mediante la utilización del Teorema del cos es posible encontrar la longitud de un lado de un triángulo conociendo las longitudes de los otros dos y la medida del ángulo comprendido por estos últimos, y los ángulos conociendo los tres lados.

ii) Mediante la utilización del Teorema del sen es posible encontrar la longitud de un lado (respectivamente la medida de un ángulo) de un triángulo conociendo el ángulo (respect. lado) opuesto y otro par lado-ángulo opuestos.

De los teoremas de congruencia de triángulos en geometría plana elemental, sabemos que un triángulo dado queda completamente determinado si se comoce uno de los siguientes conjuntos dados:

(1) Un lado y dos ángulos
(2) Dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.
(3) Dos lados y el ángulo comprendido.
(4) Los tres lados

Luego, los teoremas del sen (casos(1) y (2)) y del cos (casos (3) y (4)) debieran bastarnos para resolver cualquier triángulo bien determinado.

Ecuaciones trigonométricas. Estas son ecuaciones en las cuales la variable o incógnita (puede ser mas de una) sólo aparece en el argumento de una función trigonométrica. Así

$$2+\cos x-2\tan(x/2)=0$$

es un ejemplo de tales ecuaciones, mientras que

$$\tan x - x = 0$$

no lo es.
Cabe advertir que, al igual como ocurre con otros tipos de ecuaciones, el conjunto solución de una ecuación trigonométrica puede ser vacío, como ocurre con:

$$\cos^2(2x) + 2sen^2 x = 4.$$

Por otra parte, si una ecuación trigonométrica tiene una solución, entonces, como consecuencia de la periodicidad de las funciones trigonométricas tiene infinitas soluciones. Debido también a dicha periodicidad, sólo es necesario encontrar las soluciones de una ecuación trigonométrica sobre el intervalo$[0, 2\pi)$(o$[-\pi,\pi)$) a las cuales llamaremos soluciones básicas; el resto de las soluciones se obtiene sumando a las soluciones básicas el período correspondiente. Así por ejemplo, para la ecuación:

$$\operatorname{sen} x = ½,$$

Que equivale a buscar ángulos en posición standard que determinan sobre S^1 puntos de ordenada y_p=1/2, se tiene las soluciones básicas: $\pi/6$ y $5\pi/6$ (fig 2.29)

Luego, el conjunto solución de la ecuación es:

$$S=\left\{\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\in Z\right\}U\left\{\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi\in Z\right\}$$
$$=\begin{cases}k\pi+\tfrac{\pi}{6}\,si & k\,es\,par\\ k\pi-\tfrac{\pi}{6}\,si & k\,es\,impar\end{cases}$$

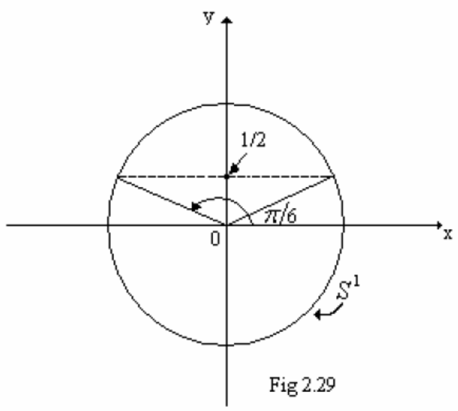

Fig 2.29

En la resolución de una ecuación trigonométrica se busca reducir éstas a ecuaciones tan simples como la del ejemplo anterior, utilizando para ello las identidades trigonométricas y las leyes del álgebra elemental. Recordemos que muchas de estas ecuaciones es posible escribirlas como ecuaciones algebraicas en x e y von la restricción: $x^2+y^2=1$.

Para ecuaciones como: $\tan x = x^2$, en las cuales la variable independiente o incógnita aparece, tanto como argumento de una función trigonométrica como en una función algebraica se muestra, en la sección siguiente, un método numérico para resolverlas.